ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ
для поступающих в магистратуру

1. 2 Вычислить

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

2. 2 В прямоугольной декартовой системе координат две прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями

$$x + 1 = \frac{y-2}{2} = z, \quad \frac{x-2}{3} = y + 1 = z + 2.$$

Найти расстояние между L_1 и L_2 и нормальное уравнение плоскости, проходящей через прямую L_1 параллельно L_2.

3. 2 Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''(x) - y(x) = e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. 2 Найти экстремум $f(x,y) = y^2 + x$ при условии $x^2 + 2y^2 = 1$.

5. 3 Найти фундаментальную систему решений линейной системы уравнений

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6. 3 Пусть $B = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}$. Вычислить

$$\iiint\limits_B \cos(z)\, dx\, dy\, dz.$$

7. 3 Исследовать несобственный интеграл на сходимость при всех значениях параметра α:

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln\left(e^x + x^\alpha\right)}{x^\alpha \sqrt{x}}\, dx.$$

8. 3 Функцию $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$, $x \in (0, 2\pi)$, разложить в ряд Фурье.

9. 4 Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^2 y''(x) - (x^2 + 2x) y'(x) + (x+2) y(x) = x^3, \quad x > 0.$$

10. 4 Шесть команд по шесть человек в каждой сдают нормы ГТО. Известно, что в одной команде сдали все, в двух — по одному не сдавшему, в остальных — по два не сдавших. Случайным образом выбирается список одной из комманд, а а затем в нём — фамилии двух участников. Если оказалось, что оба сдали нормы, то какова вероятность, что в этой команде и все остальные сдали нормы ?

ОТВЕТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в магистратуру

1. 2 Вычислить

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}(e^x) + C$.

2. 2 В прямоугольной декартовой системе координат две прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями

$$x + 1 = \frac{y-2}{2} = z, \quad \frac{x-2}{3} = y + 1 = z + 2.$$

Найти расстояние между L_1 и L_2 и нормальное уравнение плоскости, проходящей через прямую L_1 параллельно L_2.

Ответ:

Ответ: $\rho(L_1, L_2) = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \right| \Big/ \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| =$

$$= \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right| \Big/ \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = \frac{7}{\sqrt{30}}.$$

уравнение плоскости $x + 2y - 5z = 3$.

3. 2 Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''(x) - y(x) = e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \dfrac{x}{2} e^{-x}$

4. 2 Найти экстремум $f(x, y) = y^2 + x$ при условии $x^2 + 2y^2 = 1$.

Ответ: $f(x, y) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{2} + x$, $x \in [-1, 1]$,

$(1, 0)$ — максимум, $f(1, 0) = 1$,

$(-1, 0)$ — минимум, $f(-1, 0) = -1$.

5. 3 Найти фундаментальную систему решений линейной системы уравнений

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: Первая и четвёртая строки матрицы — линейные комбинации второй и третьей, поэтому

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \text{ФСР} \quad \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. 3 Пусть $B = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2 \le 1\ \}$. Вычислить

$$\iiint\limits_B \cos(z)\,dx\,dy\,dz.$$

Ответ: $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^2\,dr \int\limits_0^{\pi} \cos(r\cos\theta)\sin\theta\,d\theta = 2\pi \int\limits_0^1 r^2\,dr \int\limits_{-1}^1 \cos(rt)\,dt = 4\pi \int\limits_0^1 r\sin(r)\,dr =$

$= 4\pi\ \left(-r\cos(r)+\sin(r)\right)\Big|_{r=0}^{r=1} = 4\pi(\sin 1 - \cos 1).$

7. 3 Исследовать несобственный интеграл на сходимость при всех значениях параметра α:

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln\left(e^x + x^\alpha\right)}{x^\alpha\sqrt{x}}\,dx.$$

Ответ: Если $\alpha \ge 1$, то при $x \to +0$ имеем $f(x) \sim \dfrac{x}{x^\alpha\sqrt{x}}$, то есть сходимость при $\alpha - \dfrac{1}{2} < 1$.

Если $0 \le \alpha < 1$, то при $x \to +0$ имеем $f(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, то есть сходится.

Если $\alpha < 0$, то при $x \to +0$ имеем $f(x) \sim \dfrac{\ln(x)}{x^\alpha\sqrt{x}} = o\left(\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right)$, то есть сходится.

При $\alpha < \dfrac{3}{2}$ сходится, при остальных — расходится.

8. 3 Функцию $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$, $x \in (0, 2\pi)$, разложить в ряд Фурье.

Ответ: $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2}\,dx = 0.$ При $k \in \mathbb{N}$ имеем:

$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\pi - x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{2\pi k}\int\limits_0^{2\pi}\sin(kx)\,dx = 0.$

$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\pi - x)\sin(kx)\,dx =$

$= -\frac{1}{2\pi k}(\pi - x)\cos(kx)\Big|_{x=0}^{x=2\pi} - \frac{1}{2\pi k}\int\limits_0^{2\pi}\cos(kx)\,dx = \frac{1}{k},$

Следовательно, искомый ряд Фурье — $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(kx)}{k}$.

9. 4 Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^2y''(x) - (x^2+2x)y'(x) + (x+2)y(x) = x^3, \quad x > 0.$$

Ответ: Можно заметить, что $y_1(x) = x$ является нетривиальным решением однородного уравнения. Тогда для любого решения однородного уравнения $y(x)$ по теореме Лиувилля имеем:

$$\begin{vmatrix} x & y(x) \\ 1 & y'(x) \end{vmatrix} = x^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{y(x)}{x}\right) = C\exp\left(\int \frac{x^2+2x}{x^2}\,dx\right) = Ce^x x^2, \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = Cxe^x + Dx.$$

Неоднородное уравнение решаем методом Лагранжа вариации постоянных:

$$y(x) = C(x)xe^x + D(x)x, \quad C'(x)xe^x + D'(x)x = 0, \quad y'(x) = C(x)(x+1)e^x + D(x),$$

$$C'(x)(x+1)e^x x^2 + D'(x)x^2 = x^3, \quad \begin{pmatrix} xe^x & x \\ (x+1)e^x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C'(x) \\ D'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} C'(x) \\ D'(x) \end{pmatrix} = -\frac{1}{x^2e^x}\begin{pmatrix} -x^2 \\ x^2e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} C(x) \\ D(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-x} + C_1 \\ -x + D_1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, общее решение имеет вид

$$y(x) = \left(-e^{-x} + C_1\right)xe^x + (-x + D_1)\,x = C_1xe^x + D_1x - x - x^2.$$

10. 4 Шесть команд по шесть человек в каждой сдают нормы ГТО. Известно, что в одной команде сдали все, в двух — по одному не сдавшему, в остальных — по два не сдавших. Случайным образом выбирается список одной из комманд, а а затем в нём — фамилии двух участников. Если оказалось, что оба сдали нормы, то какова вероятность, что в этой команде и все остальные сдали нормы ?

Ответ: Пусть A_1 — выбрана команда, где все сдали, A_2 — выбрана команда, где один не сдавший, A_3 — выбрана команда, где два не сдавших. Тогда

$$P(A_1) = \frac{1}{6}, \quad P(A_2) = \frac{1}{3}, \quad P(A_3) = \frac{1}{2}.$$

Пусть B — оба выбранных участника сдали нормы. Тогда

$$P(B|A_1) = 1, \quad P(B|A_2) = \frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5} = \frac{2}{3}, \quad P(B|A_3) = \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

Следовательно,

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3) = \frac{1}{6} + \frac{2}{9} + \frac{1}{5} = \frac{53}{90}.$$

Отсюда искомая вероятность

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)} = \frac{90}{6\cdot 53} = \frac{15}{53}.$$